Небольшое пояснение к показателю Ляпунова

Рассмотрим линейное ОДУ:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x$$

Его решение x с начальным условием $x(0) = x_0$ будет иметь вид:

$$x(t) = x_0 e^{\lambda t}$$

Если теперь рассмотреть решение $\widetilde{x}$ с возмущенным начальным условием $\widetilde{x}(0) = x_0 + \delta x_0$, оно будет иметь вид:

$$\widetilde{x}(t) = (x_0 + \delta x_0)e^{\lambda t}$$

Для разности этих решений $\delta x = \widetilde{x} - x$ будет выполняться

$$\frac{d}{dt}\delta x = \lambda \cdot \delta x, \quad \delta x(0) = \delta x_0$$
$$\delta x(t) = \delta x_0 e^{\lambda t}$$

При этом величина λ называется показателем Ляпунова и при $\lambda > 0$ характеризует скорость расхождения близких траекторий: за время $t = 1/\lambda$ расхождение траекторий увеличивается в e раз, это время называется временем Ляпунова (также удобно использовать время $t = \ln 2/\lambda$, за которое расхождение увеличивается в 2 раза); при $\lambda < 0$, соответственно, траектории сходятся друг к другу.
λ может быть выражена через решения следующим образом:

$$\lambda = \frac{1}{t} \ln \frac{\delta x(t)}{\delta x(0)}$$

при этом в линейном случае результат не зависит от δx_0 и t и точки x_0, окрестность которой рассматривается.

В общем случае нас интересует поведение траекторий на достаточно большом времени при достаточно малых отклонениях от заданной точки x_0, поэтому для некоторого семейства отображений $x(t) = F(t; x_0)$ (которое может, например, отвечать решению какого-то ОДУ с начальным условием x_0) показатель Ляпунова можно определить следующим образом:

$$\lambda(x_0) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \lim_{\delta x\to 0} |\frac{F(t; x_0 + \delta x) - F(t; x_0)}{\delta x}| = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln |\frac{\partial}{\partial x} F(t; x_0)|$$

В частности, если задано нелинейное ОДУ с гладкой функцией f

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

и рассматривается окрестность стационарной точки $x_0 : f(x_0) = 0$:

$$\frac{d}{dt}\delta x = f(x_0 + \delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\delta x + O(\delta x^2)$$

тогда при фиксированном t и достаточно малом начальном отклонении δx_0 выполняется

$$\delta x(t) \approx \delta x_0 \cdot e^{\lambda t}, \quad \lambda = f'(x_0)$$

Рассмотрим теперь семейство отображений $\bar{x}(t) = F(t; \bar{x}_0)$ при $\bar{x} \in \Re^n$ (например, соответствующее решениям системы ОДУ) - в таком случае $\frac{\partial}{\partial \bar{x}} F(t; \bar{x}_0)$ представляет собой линейный оператор (т.е. производная понимается в смысле Фреше), и есть смысл рассматривать его спектр - собственные значения или, в более общем случае, сингулярные числа: $\{\sigma_i(t)\}$. Спектр Ляпунова можно определить как $\{\lambda_i = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \sigma_i(t)\}$, показателем расхождения траекторий будет наибольшее число в спектре.

В случае системы ОДУ по спектру в окрестности стационарной точки можно судить о ее устойчивости (все числа отрицательны) или неустойчивости (все числа положительны).